

# **Analys av spänningsberäkning i ConTeSt och framtagning av prototyp för Produktionsplanering Betong**

*Slutrapport*

**Marcin Stelmarczyk, The Green Dragon Magic  
Ted Rapp, Byggföretagen  
Hans Hedlund, Skanska Sverige AB**

**2022-03-21**

# Förord

Projektets arbetsgrupp vill rikta ett stort och varmt tack till samtliga deltagare i projektet. Ett särskilt tack för hjälp med tolkningen av källkodsanalysen och förståelsen av bakgrunden till olika modellval riktas till Jan-Erik Jonasson. Projektets arbetsgrupp vill slutligen rikta ett stort och varmt tack till SBUF för finansiering av detta projekt.

# Sammanfattning

Denna rapport sammanfattar SBUF-projektet 14016 Analys av spänningsberäkning i ConTeSt och framtagning av prototyp för spänningsberäkning i betong i programmet PPB. Först beskrivs genomförandet av de olika delarna i projektet inklusive vissa justeringar av senare moment, som motiverades av resultat från tidigare moment. Därefter presenteras resultaten av både de analytiska delarna av projektet och av valideringen. Slutligen följer ett kort konstaterade av slutsatser och rekommendationer, baserade på utfört arbete. Projektet har uppnått avsett mål med att förstå och dokumentera hur ConTeSt utför spänningsberäkning i ung betong och härmed säkerställt en stabil grund för vidare implementering av spänningsberäkningar i Produktionsplanering Betong.

# Innehållsförteckning

Förord.....	1
Sammanfattning.....	2
Innehållsförteckning.....	3
1 Inledning.....	4
1.1 Bakgrund och syfte.....	4
1.2 Rapportens struktur.....	4
2 Projektets genomförande.....	5
2.1 Möten.....	5
2.2 Analys av källkod och kompletterande kunskapsöverföring.....	5
2.3 Justering av valideringsförfarande.....	5
2.4 Konstruktion av mindre delprototyper i Matlab.....	5
2.5 Alternativ validering inom ramen för YoungCon.....	5
2.6 Rapport och projektförslag för implementation.....	6
3 Resultat.....	7
3.1 Strukturmodellering.....	7
3.2 Materialmodellering.....	8
3.3 Några valideringsexempel.....	8
4 Slutsatser & rekommendationer.....	10
Referenser.....	10
Bilageförteckning.....	10

# 1 Inledning

## 1.1 Bakgrund och syfte

Denna slutrapport beskriver arbete utfört i projektet SBUF 14016 Analys av spänningsberäkning i ConTeSt och framtagning av prototyp för PPB. ConTeSt är det verktyg som används i Sverige för att simulera spänning i ung betong och utföra sprickriskberäkningar för temperatursprickor. Beräkningsalgoritmerna omfattande både struktur- och materialmodeller är inte formellt dokumenterade, utan är en samling av information från olika forskningsartiklar, avhandlingar, rapporter mm. Dessa hänger vidare samman med provningsmetodik vid LTU samt algoritmer för behandling av mätdata samt anpassning av materialparametrar till materialmodellerna. Det har tidigare utförts kunskapsöverföring kring dessa algoritmer och materialmodeller i samband med utveckling av ett nytt verktyg för anpassning av parametrar till mätdata, SBUF 13108 Kvalitetssäkrad utvärdering av materialdata. Dessa har visat sig otillräckliga för att åstadkomma en ny implementation som räknar på samma sätt som den gamla beräkningskärnan. Detta projekt startades i syfte att fylla detta kunskapsgap genom ytterligare analys av gammal källkod och ytterligare kunskapsöverföring. I projektet ingick även framtagning av en prototyp eller likvärdig mjukvara som kan visas räkna spänning i relevanta fall på ett likvärdigt sätt som ConTeSt. Projektresultatet är avsett att vara indata till kommande implementering av spänningsberäkning i programmet Produktionsplanering betong (PPB).

## 1.2 Rapportens struktur

Rapporten är uppdelad i fyra delar:

- Inledning
- Projektets genomförande – här redovisas det arbetet som utfördes under projektet.
- Resultat – här redovisas en övergripande bild av resultaten. För detaljer se rapportens bilagedel.
- Slutsatser och rekommendationer – här redovisas vad projektet rekommenderar avseende uppföljningsarbete.

Denna rapport innehåller även en bilaga med detaljerad matematisk beskrivning av materialmodeller använda i spänningsberäkningar i ConTeSt.

## **2 Projektets genomförande**

### **2.1 Möten**

Då projektets mål och arbetsgång var väl definierad redan i ansökan startade projektet utan styrgruppsmöte. Kommunikationen inom styrgruppen samt med referensgruppen sköttes kontinuerligt under projektets gång. I samband med avslutande av projektet hölls ett kort styrgruppsmöte 2022-03-21, där resultaten granskades, projektmålen konstaterades uppnådda och slutrapporten godkändes för redovisning till SBUF.

### **2.2 Analys av källkod och kompletterande kunskapsöverföring**

Källkoden till ConStre version 5.0.1c 2014, som är beräkningskärnan för spänning i den senaste versionen av ConTeSt, analyserades genom s.k. reverse engineering. Denna analys omfattade 10194 rader källkod i Fortran (ca 184 A4-sidor). Resultaten diskuterades löpande med upphovsmakaren och en kompletterande överföring av grundkunskap samt motiveringar till olika vägval i modelleringen av materialegenskaperna ägde rum.

Analysen omfattande även strukturberäkningen i enlighet med metoderna Linear-Line samt Plain-Surface. Denna fanns relativt enkel, följande grundmetoderna och implementerad utan den komplexitet som kännetecknar materialmodelleringen.

### **2.3 Justering av valideringsförfarande**

Då den dominerande komplexiteten i både modellering samt implementation förelåg kring modelleringen av materialegenskaperna och inte i strukturberäkningen justerades planen för den utförda valideringen av resultaten. I stället för att bygga en fullständig prototyp inkl. både strukturberäkningen och materialmodelleringen i Matlab och jämföra resultaten med ConTeSt, valdes att endast implementera den fullskaliga materialmodelleringen i verktyget för anpassning av parametrar för just dessa materialmodeller, SBUF 13108, som i vidareutvecklad form (YoungCon) används löpande vid LTU. Detta möjliggjorde en mer omfattande jämförelse än just materialmodelleringen då anpassningsalgoritmerna testar ett stort antal kombinationer av materialparametrar.

### **2.4 Konstruktion av mindre delprototyper i Matlab**

Endast ett antal mindre delalgoritmer testades i Matlab, huvudsakligen för att fördjupa förståelsen för hur de fungerar och inte i valideringssyfte. För övrig validering se följande sektion av denna rapport.

### **2.5 Alternativ validering inom ramen för YoungCon**

Huvudvalidering av algoritmer för modellering av materialegenskaper skedde inom ramen för det verktyg, YoungCon, som idag används för att anpassa just dessa parametrar till mätningar av krypning, frirörelse samt försök i spänningsrigg, utförda vid LTU. Det sista anpassningssteget i YoungCon bygger på fullständig simulering av beteende hos ett materialprov i en spänningsrigg. Där styrs temperaturen hos materialet genom externa värmare och provet är förhindrat att röra sig, s.k. fullständig inlåsning. Under mätningen registreras kraften som krävs för att hålla emot provets

rörelse. Denna är ett direkt mått på erhållen spänning i provets tvärsektion. Den uppmätta kraftkurvan jämförs sedan mot en kurva som beräknas ur de använda materialmodellerna, de materialparametrar som anpassas samt den påtvingade temperaturkurvan.

YoungCon togs ursprungligen fram med just en sådan modellering som visat sig inte stämma överens med motsvarande beräkning utförd i Constre. När skillnader i beräkningsresultat upptäcktes, justerades inte beräkningen i detta anpassningssteg i YoungCon utan i stället använde YoungCon beräkningen i Constre.

Detta projekt valde att ta fram en uppdaterad version av YoungCon med egen fullskalig simulering av materialbeteende och jämföra den mot den gamla, baserade på Constre. Som underlag till jämförelse användes uppmätt beteende för tre olika betonger med olika bindemedelssammansättningar, bl.a. s.k. grön betong. För dessa har simuleringar med olika materialparametrar för spänning utförts och jämförts mellan verktygen.

## **2.6 Rapport och projektförslag för implementation**

Resultaten dokumenterades i form av denna rapport. Då utvecklingsresurser, i form av berör personal, för närvarande inte är tillgängliga samt vissa frågor rörande projektdesign kvarstår att diskutera med tilltänkta projektdeltagare, har ansökan för implementeringsprojektet endast utarbetats som ett utkast. En projektansökan avses att lämnas in till SBUF under 2022.

### 3 Resultat

Projektet har uppnått de tilltänkta resultaten. Det etablerades en god insikt och förståelse för den gamla källkoden. Baserat på detta samt ett flertal tidigare forskningspublikationer kunde det fastställas hur ConTeSt och dess beräkningskärna för spänning, Constre, utför beräkningar. Denna kunskap kan delas upp i två områden, strukturmodeller (hur strukturen/konstruktionen beter sig) samt materialmodeller (hur materialet beter sig). Strukturmodellerna visade sig vara relativt enkla och föranledde inte någon mer omfattande dokumentation, då Constre implementerar en redan beskriven metodik. För en förenklad beskrivning med vidare referens se sektionen nedan. Mycket mer omfattande arbete lades ner på dokumentation av materialmodeller, inkl. full matematisk beskrivning, då dessa är väsentligt mer komplexa och dessutom kombinerar olika slags beteenden hos materialet med varandra, se vidare denna rapport och främst dess bilaga. Vidare presenteras en jämförelse mellan beräkningar som ligger till grund för valideringen av den framtagna kunskapen. Ytterligare en observation som kan biläggas resultaten är att inga nya buggar utöver några redan kända upptäcktes under genomgången av Constre.

#### 3.1 Strukturmodellering

Constre innehåller spänningsberäkning baserat på två olika strukturmodeller: Linear-Line Analysis (LL) och Plain-Surface Analysis (PLS). Dessa är till stor del snarlika och bägge utgår från väl bekanta principer inom balkteori. Den grundläggande skillnaden består i antalet frihetsgrader för konstruktionens yttre rörelse. LL tillåter både en deformation i balkens längdled samt en deformation i form av böjning, se figur nedan.

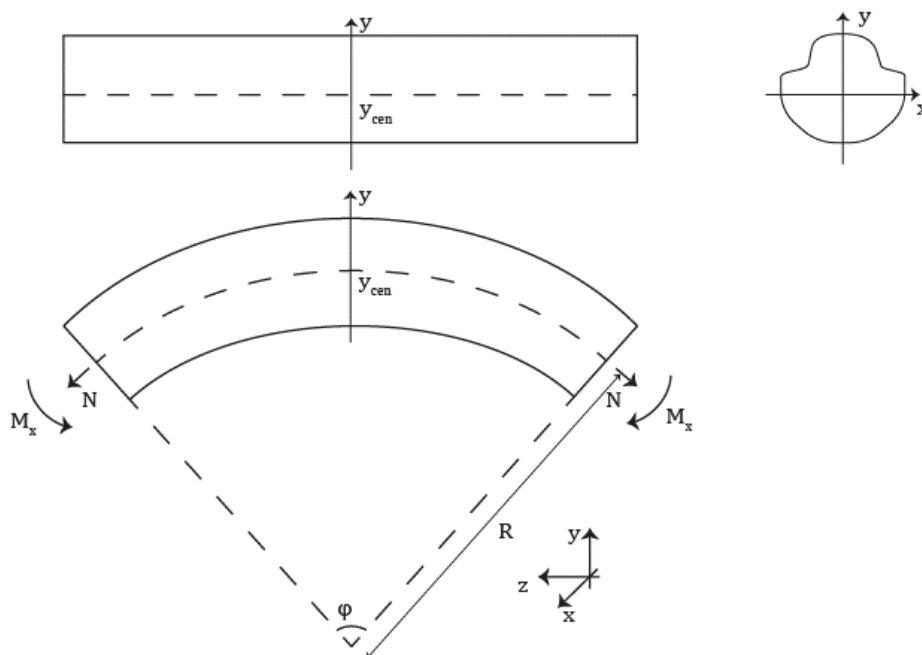


Fig. 1 Principiell skiss över yttre deformation och samverkande yttre krafter och böjmoment i enlighet med Linear-Line.

PLS tillåter en mer komplex deformation med tillhörande yttre samverkan genom en andra böjning kring y-axeln, se figur 1. För detaljer och referenser för LL och PLS se vidare Jonasson 1994.



## 3.2 Materialmodellering

Modelleringen av materialegenskaper bjuder på en hel del komplexitet. I grund och botten ses betong som ett viskoelastiskt material med en krypning som modelleras med hjälp av en s.k. kedja av Maxwell-element med åldersberoende E-moduler. Till detta tillkommer en icke lokaliserad modellering av mikrosprickor, s.k. smeard crack model. Denna modifierar ett i grunden linjärt elastiskt samband mellan spänning och töjning till ett icke-linjärt plastiskt. Även denna modell bjuder på en del komplexitet då både töjningshållfastheten, gränsen mellan bägge sambanden samt E-modulen i fråga varierar med ålder.

Vidare täcker materialmodelleringen även betongens beteende när det gäller egen töjning. Denna består av två komponenter: värmeutvidgning samt autogen rörelse, även kallad krypning. För detaljerad beskrivning av samtliga materialmodeller med bakomliggande ekvationer se bilaga 1.

## 3.3 Några valideringsexempel

Nedan visas några exempel från valideringen av algoritmerna genom jämförande beräkning av spänningsnivå som funktion av tid. Tre huvudfall för jämförelsen redovisas i separata diagram där tre olika bindemedelssammansättningar har testats, se Fig. 2, Fig. 3 samt Fig. 4. Varje av dessa har grunddata för det specifika bindemedelssammansättningen och baserar sig på ett för cementet specifikt temperaturförlopp. Tre olika uppsättningar av spänningsparametrar (P1, P2 samt P3) har jämförts beräknade både med Constre och den nyligen implementerade algoritmen i YoungCon.

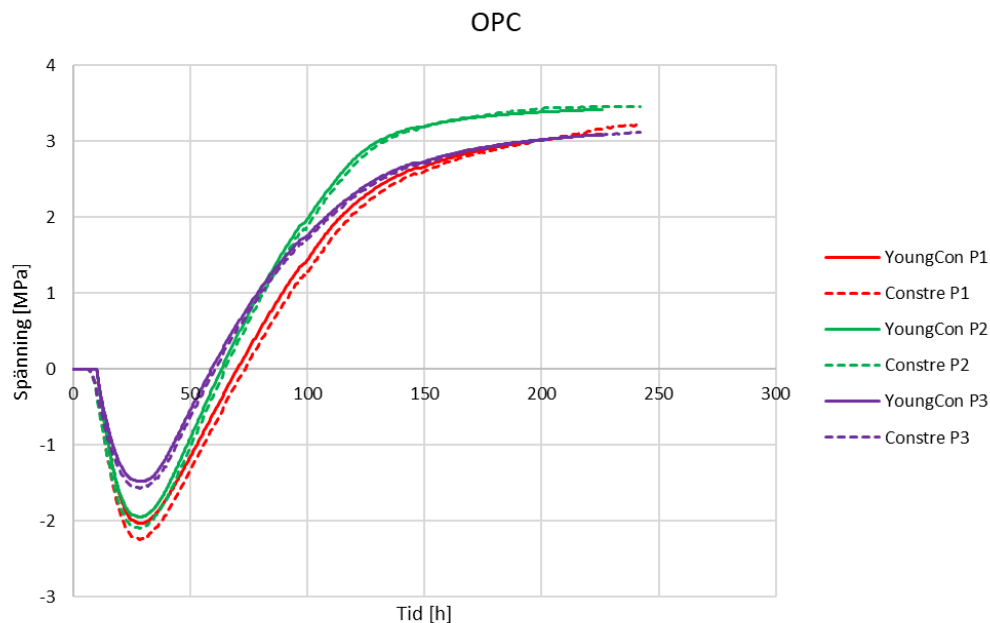


Fig. 2 Jämförelse av spänningsberäkning för olika parameteruppsättningar (P1, P2 och P3) mellan YoungCon och Constre för anläggningsbetong med rent OPC.

Mjukvarorna använder olika typer av tidsstegning, vilket ger en viss skillnad i noggrannhet i beräkningen. Med hänsyn till detta bedöms de observerade skillnaderna tillräckligt små för att bägge algoritmer kan anses ge likvärdiga resultat. En mycket viktigare observation i jämförelsen är att bägge algoritmerna responderar likadant till skillnader i både val av parametrar för spänning och för andra

grundläggande parametrar som beskriver beteende hos tre mycket olika bindemedelssammansättningar.

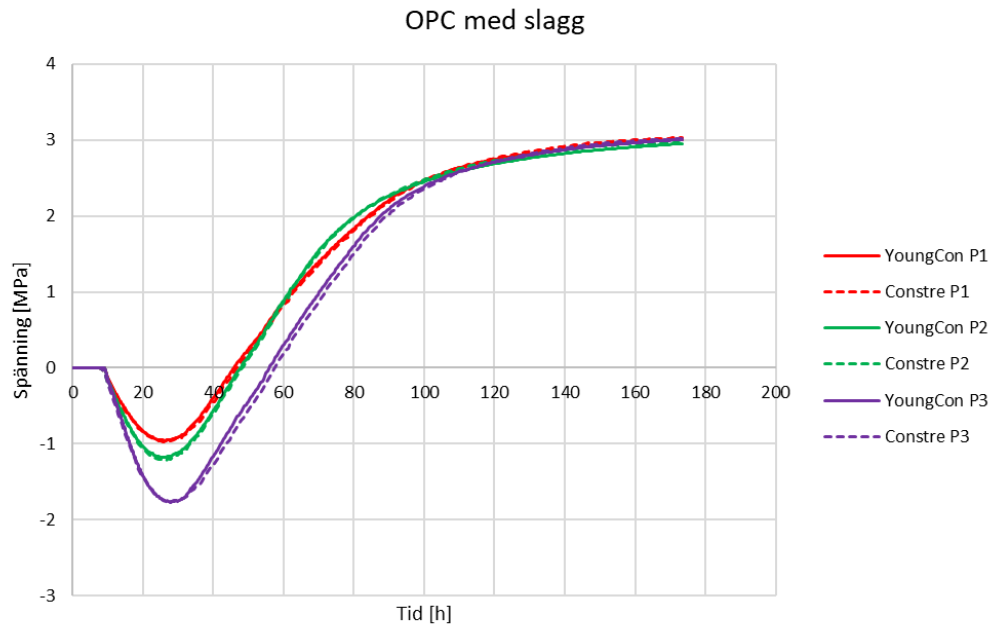


Fig. 3 Jämförelse av spänningsberäkning för olika parameteruppsättningar (P1, P2 och P3) mellan YoungCon och Constre för anläggningsbetong med OPC och slagg.

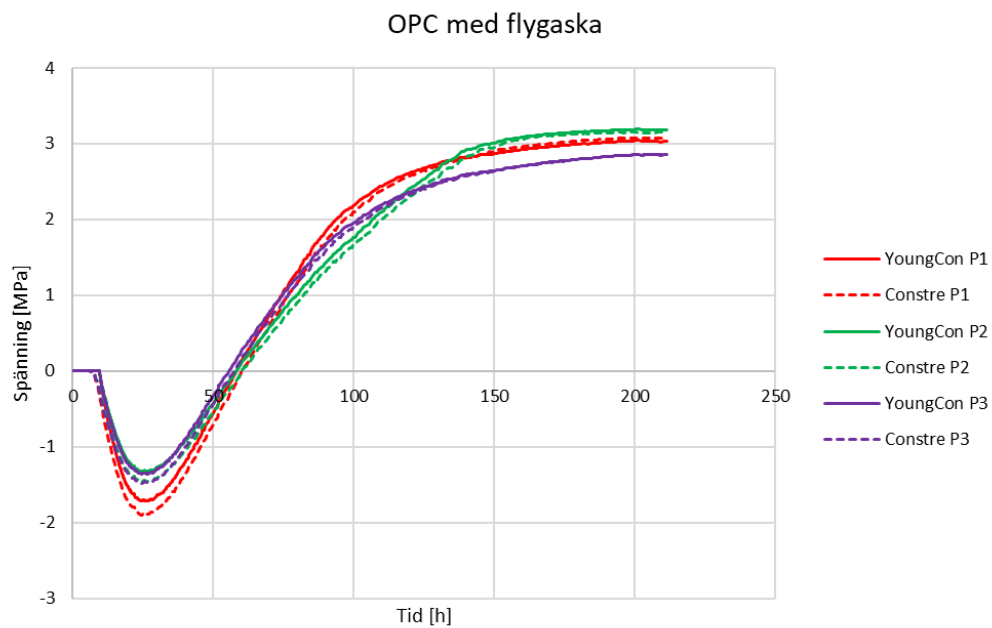


Fig. 4 Jämförelse av spänningsberäkning för olika parameteruppsättningar (P1, P2 och P3) mellan YoungCon och Constre för anläggningsbetong med OPC och flygaska.

## 4 Slutsatser & rekommendationer

Projektet kan konstatera att det nu föreligger klarhet i hur ConTeSt med dess beräkningskärna Constre utför spänningsberäkningar. God insikt har erhållits och dokumenterats för använda algoritmer och modeller beskrivande både materialbeteende samt strukturapproximationen i beräkningen. Tidigare observerade skillnader har förklarats och osäkerhet avseende hur det beräkningsverktyg, som används i Sverige för temperatursprickrisker, fungerar har eliminerats. Denna kunskap har redan resulterat i uppdatering av befintligt verktyg för anpassning av materialdatatill uppmätt beteende (YoungCon). Samtidigt utgör den ett fast underlag för realisering av en ny, långsiktig beräkningsplattform för sprickrisker i form av en ny beräkningsmodul i Produktionsplanering Betong (PPB).

Projektet rekommenderar härmed vidare implementation av bägge beräkningsätten, Linear Line Analysis och Plane Surface Analysis, för spänningsberäkning i PPB.

## Referenser

**Jonasson 1994** – J.-E. Jonasson, *Modelling of Temperature, Moisture and Stress in Young Concrete*, Doktorsavhandling 1994:153 D, LTU

## Bilageförteckning

1. Materialmodeller

# SBUF 14016 Slutrapport Bilaga 1

## Materialmodeller

### 1 Material strain

During hardening, the concrete undergoes changes that result in strain. This strain is not a result of any external load. It is generated by the material itself and it consists of two parts, thermal dilatation and shrinkage due to hydration and drying.

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_T + \varepsilon_{SH}$$

where

$\varepsilon_T$  is thermal dilatation

$\varepsilon_{SH}$  is shrinkage

$\varepsilon_{tot}$  is total strain generated by the material.

#### 1.1 Thermal dilatation

Thermal dilatation is proportional to the temperature change and given by the formula below.

$$\Delta\varepsilon_T = \Delta T \alpha_T$$

where

$\Delta\varepsilon_T$  is change in thermal dilatation

$\Delta T$  is change in temperature

$\alpha_T$  is the thermal dilatation coefficient.

Traditionally two versions of the coefficient have been used – one during heating phase of the hydration and another during cooling. These seems to be no good physical argumentation for having two different values for this parameter and adaptations of material parameters today only uses one and the same value for both heating and cooling. Historically the two different values were used while there was no explicit model for shrinkage strain and different coefficients for thermal dilatation were used to approximate the entire material strain.

#### 1.2 Shrinkage

Shrinkage due to hydration and drying is give by the following formulae, depending on the equivalent time of maturity:

$$\varepsilon_{SH} = \begin{cases} 0 & \text{for } t_e \leq t_{e0} \\ \frac{(t_e - t_{e0})}{(t_{SH} - t_{e0})} \varepsilon_1 & \text{for } t_{e0} < t_e \leq t_{SH} \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_{ref} \exp \left[ - \left( \frac{t_{s0}}{t_e - t_{SH}} \right)^{\eta_{SH}} \right] & \text{for } t_e > t_{SH} \end{cases}$$

where

$t_e$  is equivalent time/age of maturity

$t_{e0}$  is starting age before which no shrinkage takes place

$t_{SH}$  is the limit age between a linear phase and an exponential phase

$\varepsilon_1$  is an adaptation parameter, representing the maximum shrinkage at the end of the linear phase  
 $\varepsilon_{ref}$  is an adaptation parameter, representing the maximum shrinkage generated by the exponential addition

$t_{s0}$  is an adaptation parameter

$\eta_{SH}$  is an adaptation parameter.

In order to calculate a change in shrinkage for a given time step, a difference between shrinkage values for the maturity at the start and the end of the time step is used:

$$\Delta\varepsilon_{SH} = \varepsilon_{SH}(t_e(t_2)) - \varepsilon_{SH}(t_e(t_1))$$

## 2 Stress-induced strain

There are two stress-strain-related correction of non-linear character that are used in the material modelling of concrete behavior, derived from Bazant & Chern 1985. Both use the ratio between stress and tensile strength as a source of correction on the two types of material strain, i.e. thermal dilatation and shrinkage. The corrected strain values are calculated according to the following formulae:

$$\Delta\varepsilon_T^c = \Delta\varepsilon_T(1 + \varrho_T \frac{\sigma}{f_{ct}} \text{sign}(\Delta T))$$

$$\Delta\varepsilon_{SH}^c = \Delta\varepsilon_{SH}(1 + \varrho_{SH} \frac{\sigma}{f_{ct}} \text{sign}(\Delta\varphi))$$

where

$\varrho_T$  is an adaptation parameter

$\varrho_{SH}$  is an adaptation parameter

$\sigma$  is the stress in the material

$f_{ct}$  is the tensile strength of the material

$\Delta\varphi$  is a change in relative humidity.

where  $\varrho_T$  and  $\varrho_{SH}$  are material parameters. The sign of corrections is driven by the sign of change in the driving potential behind each phenomenon. When computation of moisture is not taking place and moisture potential changes are not available the following approximation is used:

$$\text{sign}(\Delta\varphi) \approx \text{sign}(\Delta T)$$

One should observe that these corrections shall be applied during both tension and compression independent of the fact that the amount of impact from stress in the formulae is related to the tensile strength only.

## 3 Creep

Creep phenomena in concrete are modelled by use of a chain of Maxwell elements with maturity dependent E-modulus, based on Bazant & Wu 1974. First lets capture the behavior of one Maxwell element, as presented in figure below.

## Bilaga 1

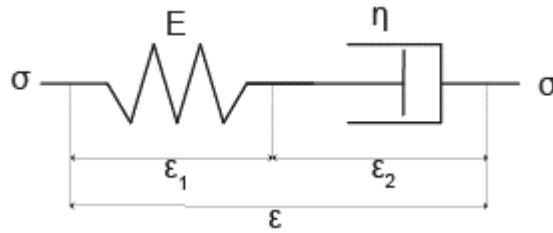


Fig. 1 A Maxwell element.

The governing laws for the spring element and the piston element give resp.:

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma}{E}$$

and

$$\dot{\epsilon}_2 = \frac{\sigma}{\eta}$$

where

$\sigma$  is the stress in the element

$\epsilon_1$  is the strain of the spring

$E$  is the E-modulus of the spring

$\dot{\epsilon}_2$  is the time derivative of the strain of the piston

$\eta$  is the viscosity of the piston.

Differentiation with respect to time and summarizing gives further:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Rearranging gives the ordinary differential equation:

$$\dot{\sigma} + \frac{E}{\eta}\sigma = E\dot{\epsilon}$$

with a homogenous solution

$$\sigma_H = Ae^{-\frac{E}{\eta}t}$$

where

$A$  is a constant of choice.

As a particular solution the obvious case, corresponding to the time-asymptotic, constant rate piston movement, is chosen:

$$\sigma_P = \eta\dot{\epsilon}_{const}$$

where

$\dot{\epsilon}_{const}$  is a constant time derivative of strain.

Adding these together and using the start condition  $\sigma = \sigma_0$  at  $t = 0$  gives the final solution:

## Bilaga 1

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E}{\eta}t} + \eta \dot{\epsilon}_{const} \left[ 1 - e^{-\frac{E}{\eta}t} \right]$$

Defining further the retardation time by  $\tau = \frac{\eta}{E}$  and substituting it results in the equation giving the behavior of a single Maxwell element:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \tau E \dot{\epsilon}_{const} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

Now consider a time step  $[t_1, t_2]$  with  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Setting  $\dot{\epsilon}_{const} = \frac{\Delta \epsilon}{\Delta t}$  and using the start condition  $\sigma = \sigma_0$  at  $t = t_1$  gives:

$$\sigma(t_2) = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \tau E \frac{\Delta \epsilon}{\Delta t} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

And after some rearrangement

$$\Delta \sigma = E \frac{1 - e^{-\Delta t/\tau}}{\Delta t/\tau} \Delta \epsilon - \sigma_0 \left[ 1 - e^{-\Delta t/\tau} \right]$$

where the first term describes the instant elastic response of the element to a strain load and the other the time based relaxation of the total stress in the element.

Consider now a chain of  $m$  such elements with differing material parameters, given in the figure below. Using the last formula for the stress change on a time step for one Maxwell element, the calculation for the entire chain is given simply by summation over all element:

$$\Delta \sigma = \sum_{\mu=1}^m E_{\mu} \frac{1 - e^{-\Delta t/\tau_{\mu}}}{\Delta t/\tau_{\mu}} \Delta \epsilon - \sum_{\mu=1}^m \sigma_{\mu,0} \left[ 1 - e^{-\Delta t/\tau_{\mu}} \right]$$

By use of substitution  $E^* = \sum_{\mu=1}^m E_{\mu} \frac{1 - e^{-\Delta t/\tau_{\mu}}}{\Delta t/\tau_{\mu}}$  and  $\Delta \sigma^* = \sum_{\mu=1}^m \sigma_{\mu,0} \left[ 1 - e^{-\Delta t/\tau_{\mu}} \right]$  the equation governing stress change on one time step with constant strain can be simplified into:

$$\Delta \sigma = E^* \Delta \epsilon - \Delta \sigma^*$$

where the first term describes the total instant elastic response of the chain to a strain load and the other the total time based relaxation of the stress in the chain.

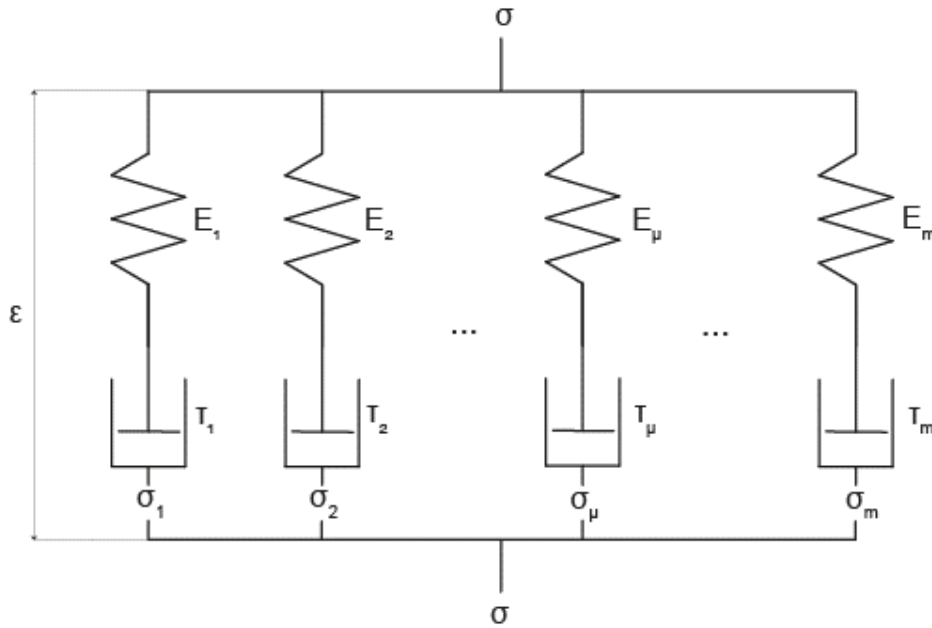


Fig. 2 A chain of  $m$  Maxwell elements.

In practice, a set of retardation times for the chain is chosen and an adaptation of the corresponding E-moduli is performed to measured movement. The time dynamics of material response of hardening concrete are modeled as piece-wise linear dependency of the E-moduli on equivalent time of maturity.

### 3.1 Temperature dependency

In order to model temperature dependency in the speed of relaxation, the retardation times are corrected with respect to average temperature before use for each time step according to:

$$\tau_{\mu,T} = \tau_{\mu} \exp \left[ -\theta_{Temp} \left( \frac{1}{293} - \frac{1}{273 + T_{ave}} \right) \right]$$

where

$\tau_{\mu,T}$  is the temperature-corrected retardation time

$\tau_{\mu}$  is the uncorrected retardation time

$\theta_{Temp}$  is a material parameter

$T_{ave}$  is the average temperature during the time interval in question.

## 4 Non-linear stress-strain relation

### 4.1 The concept

In linear-elasticity the relation between stress and strain is typically modelled as shown in the figure below left with the first part of the red line with a slope equal to the E-modulus.



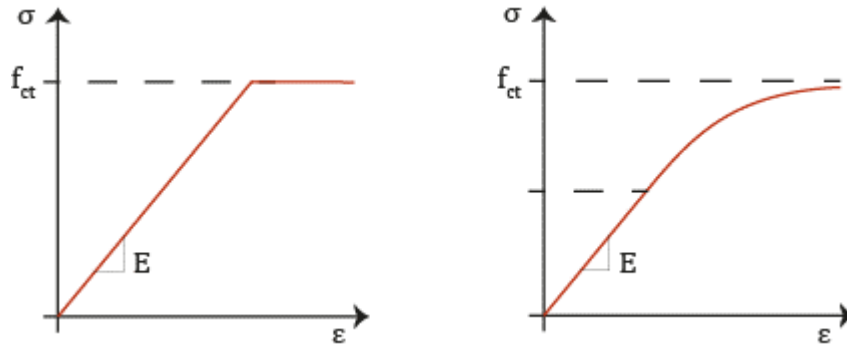


Fig. 3 Comparison between left: a linear elastic behavior until a failure point with plastic deformation thereafter without any further stress increase and right: a linear elastic behavior up to a certain point and thereafter a non-linear plastic deformation with decreasing slope between stress and strain.

The simplest way to incorporate some kind of failure of elasticity and a transition to plastic deformation is shown in the same figure by the other part of the red line with 0 slope. When the stress level reaches the strength of the material, a plastic deformation starts and there is theoretically no limit for how large the strain may become. In practice few materials exhibit such a behavior. When it comes to concrete a model better visualized with the right diagram is used. The transition between the elastic and the plastic domain is smoother and more gradual in order to better correspond to effects of successive micro-cracking before a total material failure. This means that there is a typical elastic region up to a certain stress level, where all the deformation is considered reversible. Above that level the deformation is considered plastic and non-reversible as well as the relation between the stress and strain follows a decreasing E-modulus.

## 4.2 The variable normalization and the curve description

In order to handle the dynamics of maturity dependency for properties of young concrete a change of variables is adopted with corresponding substitutions and a normalization of the relation above. Instead of working directly with stress, a stress ratio is defined:

$$\xi = \frac{\sigma}{f_{ct}}$$

where the absolute stress level is related to its corresponding strength (tensile or compressive for various stress signs). Further, instead of working directly with strain, a strain ratio is also defined:

$$\zeta = \frac{E\varepsilon}{f_{ct}}$$

where the absolute strain is multiplied with its corresponding E-modulus and related to the strength level of the material. These substitutions transform the relation between stress and strain into a relation between both ratios,  $\xi$  and  $\zeta$  according to the figure below. The key advantage of working in these variables is the simplification of handling of time dynamics of the tensile strength. For each time step in the calculation a scaling is performed to adjust the  $\xi$  and  $\zeta$  with respect to change in  $f_{ct}$  and modelling of the relation between the variables simply continues in the normalized coordinates.

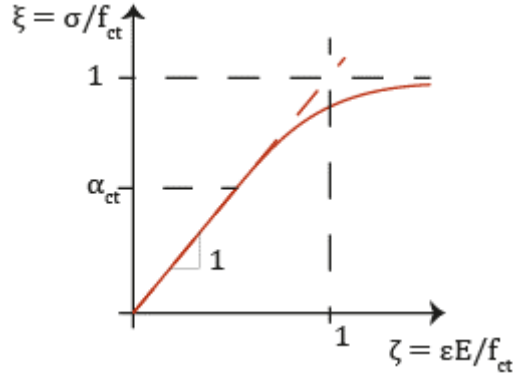


Fig. 4 The combined linear-elastic and non-linear plastic model in normalized coordinates.

The slope of the curve,  $\gamma$ , is defined according to:

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{for } \zeta \leq \alpha_{ct} \\ \exp\left(-\frac{\zeta - \alpha_{ct}}{1 - \alpha_{ct}}\right) & \text{for } \zeta > \alpha_{ct} \end{cases}$$

where  $\alpha_{ct}$  defines the border between elastic and plastic material behavior. Explicit formula for the relation curve in the elastic region is given by identity between the variables. In order to get the formula for the plastic region some integration is required.

$$\begin{aligned} \xi(\zeta) &= \alpha_{ct} + \int_{\alpha_{ct}}^{\zeta} \exp\left(-\frac{\zeta' - \alpha_{ct}}{1 - \alpha_{ct}}\right) d\zeta' = \alpha_{ct} - \left[(1 - \alpha_{ct})\exp\left(-\frac{\zeta' - \alpha_{ct}}{1 - \alpha_{ct}}\right)\right]_{\alpha_{ct}}^{\zeta} \\ &= \alpha_{ct} - (1 - \alpha_{ct})\exp\left(-\frac{\zeta - \alpha_{ct}}{1 - \alpha_{ct}}\right) + (1 - \alpha_{ct}) \end{aligned}$$

which after simplification gives

$$\xi(\zeta) = \begin{cases} \zeta & \text{for } \zeta \leq \alpha_{ct} \\ 1 - (1 - \alpha_{ct})\exp\left(-\frac{\zeta - \alpha_{ct}}{1 - \alpha_{ct}}\right) & \text{for } \zeta > \alpha_{ct} \end{cases}$$

In order to be able to follow the curve in the opposite variable direction, i.e. from  $\xi$  to  $\zeta$ , the formula above has to be inverted.

$$\begin{aligned} \xi &= 1 - (1 - \alpha_{ct})\exp\left(-\frac{\zeta - \alpha_{ct}}{1 - \alpha_{ct}}\right) \\ -\frac{\xi - 1}{1 - \alpha_{ct}} &= \exp\left(-\frac{\zeta - \alpha_{ct}}{1 - \alpha_{ct}}\right) \\ -\ln\left(\frac{1 - \xi}{1 - \alpha_{ct}}\right) &= \frac{\zeta - \alpha_{ct}}{1 - \alpha_{ct}} \\ \zeta &= \alpha_{ct} + (1 - \alpha_{ct})\ln\left(\frac{1 - \alpha_{ct}}{1 - \xi}\right) \end{aligned}$$

and summarizing for the entire domain

$$\zeta(\xi) = \begin{cases} \xi & \text{for } \xi \leq \alpha_{ct} \\ \alpha_{ct} + (1 - \alpha_{ct}) \ln\left(\frac{1 - \alpha_{ct}}{1 - \xi}\right) & \text{for } \xi > \alpha_{ct} \end{cases}$$

### 4.3 Loading, unloading and reloading

The general picture of loading, unloading and reloading of the material has a certain complexity and requires administration of where in the  $\xi$  vs.  $\zeta$  diagram one actually operates. There are principally 4 different cases, as shown in the figure below.

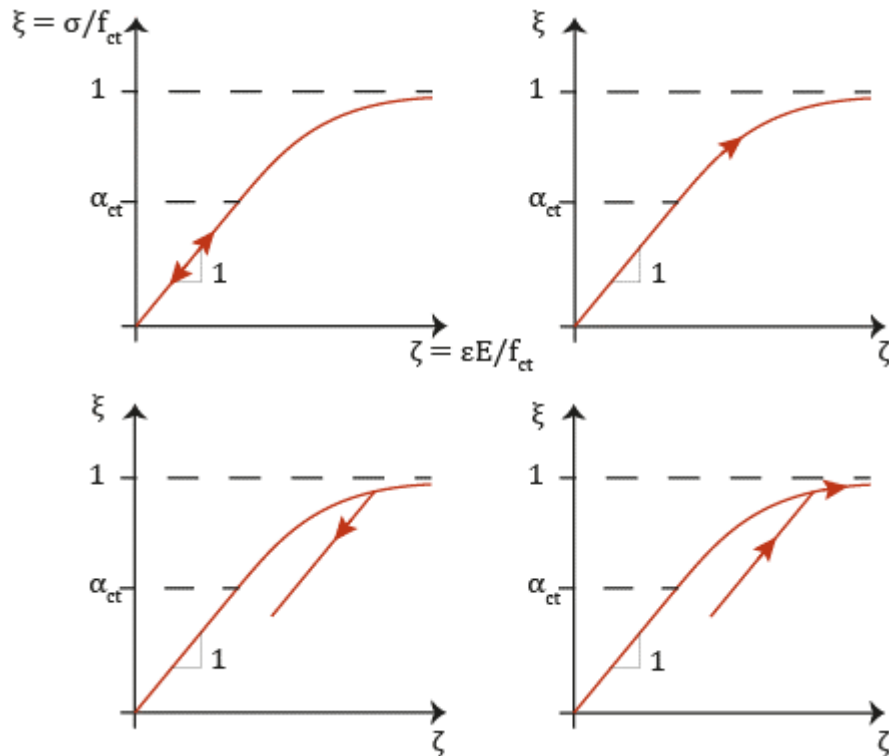


Fig. 5 Loading situations. Upper left: reversible loading in elastic domain. Upper right: continued loading into plastic deformation region. Lower left: elastic unloading from partially plastic deformation. Lower right: first elastic reloading and then continued plastic loading.

The cases are given as follows:

1. Loading unloading and reloading in the purely elastic region of the diagram. As long as the stress ratio does not exceed  $\alpha_{ct}$  all loading is reversible independent of sign and  $\gamma$  equals 1.
2. When the stress ratio exceeds  $\alpha_{ct}$  the following increase in deformation will be plastic, i.e. non-reversible and the loading follows the defined curve with a successively decreasing  $\gamma$ .
3. Unloading from a partially plastic deformation becomes a little more complex. It does not follow the curve. What happens here is that the elastic part of the initial deformation gets unloaded and the plastic part remains deformed. This means that unloading is done reversible and linearly with use of  $\gamma$  equaling 1.
4. Reloading from the previous state has to be done in precisely the reverse order. First reloading is done elastically with  $\gamma$  equaling 1, until the entire elastic unloading is reversed,

i.e. the red curve is reached. Thereafter any further loading proceeds plastically along the red curve with a decreasing  $\gamma$ .

#### 4.4 Connection to relaxation handling

In order to add the potential non-linear effect described above to the load administration from the Maxwell-chain, the slope of loading,  $\gamma$ , for the current loading point,  $\xi$  and  $\zeta$ , and sign of stress change is used. The  $\gamma$  is calculated according to the loading rules and formulae given earlier and is added to the final equation for stress change on a time step for the Maxwell chain by extending its final equation:

$$\Delta\sigma = E^*\Delta\varepsilon - \Delta\sigma^*$$

Into

$$\Delta\sigma = \gamma(E^*\Delta\varepsilon - \Delta\sigma^*)$$

One additional observation is crucial to this computation. The Maxwell chain uses accumulated stress as a natural state variable and strain only as an increase or decrease of the internal load. Entire relaxation is handled by decreasing of stress. The non-linear stress-strain-relation, i.e. where on the loading curve one is, can on the other hand be handled by both tracking of stress ratio and/or strain ratio. While combining the two models only one approach will in reality work. Keeping track of strain state with respect to the relaxation of the Maxwell chain is simply very difficult. The recommended procedure is to keep track of the loading position in the  $\xi$ - $\zeta$ -diagram by use of  $\xi$ , i.e. the stress rate. When stress is the key state variable the relaxation is handled automatically by the equation above and no additional corrections are necessary. This is the main reason for earlier deriving formula for calculation of strain rate from stress rate:

$$\zeta(\xi) = \begin{cases} \xi & : \xi \leq \alpha_{ct} \\ \alpha_{ct} + (1 - \alpha_{ct}) \ln\left(\frac{1 - \alpha_{ct}}{1 - \xi}\right) & : \xi > \alpha_{ct} \end{cases}$$

## 5 References

**Bazant & Chern 1985** – Bazant Z. P., Chern J., Concrete creep at variable humidity: constitutive law and mechanisms, Material and Structures, Vol 18, pp1 – 20, 1985

**Bazant & Wu 1974** – Bazant Z. P., Wu S. T., Rate-type Creep Law of Concrete Based On Maxwell Chain. Material and Structures, Vol. 7/1974, pp. 45-60